Διαφ. Εξισώσεις

21/11/16

Την Πέμπτη 1/12/16 στο τέλος της διάλεξης θα πραγματοποιηθεί 30-35' τεστ (θεωρία - Ασκηση)

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Γ.Δ.Ε: $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $x \in I$

Παράδειγμα

$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8x y' - 8y = 0$

$\sim y_0(1) = 0$, $y_0'(1) = 1$, $y_0''(1) = 2$

Ψάξτε για λύση της μορφής $y(x) = x^\nu$

$\xrightarrow{y(x)=x^\nu}$ $x^3 \nu(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-3} - 4x^2 \nu(\nu-1)x^{\nu-2} + 8x\nu x^{\nu-1} - 8x^\nu = 0$, $x>0$

$$x^\nu\left[\nu(\nu-1)(\nu-2) - 4\nu(\nu-1) + 8\nu - 8\right] = 0$$

$$(\nu-1)\left[\nu(\nu-2) - 4\nu + 8\right] = 0$$

$$(\nu-1)(\nu-2)(\nu-4) = 0$$

$\nu=1$ ή $\nu=2$ ή $\nu=4$

Άρα $y_1(x) = x$

$y_2(x) = x^2$

$y_3(x) = x^4$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2x & 4x^3 \\ 2 & 12x^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^4 \\ 2 & 12x^2 \end{vmatrix}$$

$$= x(24x^3 - 8x^3) - (12x^4 - 2x^4)$$

$$= 16x^4 - 10x^4$$

$$= 6x^4$$

Είναι $W(x) = 6x^4 \neq 0$, $\forall x>0$, άρα y_1, y_2, y_3 γραμ. ανεξάρτητες, δηλ. το $\{y_1, y_2, y_3\}$ είναι Β.Σ.Λ της εξίσωσης

Επομένως όλες οι λύσεις της εξίσωσης $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4$, $x>0$

$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 4c_3 x^3$

$y''(x) = 2c_2 + 12c_3 x^2$

Για την εύρεση της $y_0(x)$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y_0(1)=0 \Rightarrow c_1+c_2+c_3=0 \\ y_0'(1)=1 \Rightarrow c_1+2c_2+4c_3=1 \\ y_0''(1)=2 \Rightarrow 2c_2+12c_3=2 \end{array}\right| \Longrightarrow c_1=-1,\ c_2=1,\ c_3=0$$

Άρα $\boxed{y_0(x)=-x+x^2 \quad , x>0}$

Άσκηση

Να επιλυθεί η ομογ. γ.δ.ε : $L(x)=y'''-6y''+5y'+12y=0$

$\rightsquigarrow y(x)=e^{cx},\ c\in\mathbb{R}$

$$L(e^{cx}) = c^3e^{cx}-6c^3e^{cx}+5ce^{cx}+12e^{cx}=0$$

$$c^3-6c^2+5c+12=0$$

$c_1=-1 \rightsquigarrow y_1(x)=e^{-x}$

$c_2=3 \rightsquigarrow y_2(x)=e^{3x}$

$c_3=4 \rightsquigarrow y_3(x)=e^{4x}$

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{3x} & e^{4x} \\ -e^{-x} & 3e^{3x} & 4e^{4x} \\ e^{x} & 9e^{x} & 16e^{4x} \end{vmatrix} = \ldots$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ας είναι $y_1,\ldots,y_n \in C^n(I)$ με $W(y_1,\ldots,y_n)(x)\neq 0,\ x\in I$. Υπάρχει μοναδική ομογενής γραμ. εξίσωση n-τάξης της μορφής $(E_0)^{(n)}$ με $a_n(x)=1,\ x\in I$, που έχει το $\{y_1,\ldots,y_n\}$ Β.Σ.Λ.
Η εξίσωση γράφεται $\dfrac{W(y_1,\ldots,y_n,y)(x)}{W(y_1,\ldots,y_n)(x)}=0,\ x\in I$

Απόδειξη

$$W(y_1,\dots,y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \vdots & & & & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{W(y_1,\dots,y_n)(x)}{W(y_1,\dots,y_n)(x)}}_{=1} y^{(n)} - \frac{W_1}{W(x)}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + \frac{W_n}{W(x)}\, y = 0$$

$\leadsto y_i$: λύσεις με $W(y_1,\dots,y_n)(x) \neq 0 \Rightarrow \{y_1,\dots,y_n\}$ Β.Σ.Λ

Υποθ. ότι οι $y_1,\dots,y_n$ αποτελούν Β.Σ.Λ της εξίσωσης

(E_1) $\quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

(E_2) $\quad y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_1 y' + b_0 y = 0$

Ας είναι $r \in \{1,\dots,n-1\}$: $a_{r+1} = b_{r+1}, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_r \neq b_r$

Παρατηρώ ότι οι $y_1,\dots,y_n$ θα είναι λύσεις και της εξίσωσης

$(**)$ $\quad (a_r - b_r) y^{(r)} + \dots + (a_1 - b_1) y' + (a_0 - b_0) y = 0$

Για τις συναρτήσεις $y_1,\dots,y_r$ έχουμε ότι - είναι λύσεις της $(**)$

- είναι γραμ. ανεξάρτητες (?)

(αν όχι, τότε οι $\{y_1,\dots,y_r,y_{r+1},\dots,y_n\}$ γ.ε άτοπο)

Άρα $\{y_1,\dots,y_r\}$ Β.Σ.Λ της $(**)$

Συνεπώς $\exists\, c_1,\dots,c_n$ με $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$ και $y_n(x) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_r \Rightarrow \{y_1,\dots,y_n\}$ γραμ. ανεξ., άτοπο

(Και ολοκληρώθηκε η απόδειξη)

Θεώρημα (υποβ. τάξης)

Ας είναι y_1 μια λύση της $(E_0)^{(n)}$ με $y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Για $y = u y_1$, $v = u'$ η εξίσωση $(E_0)^{(n)}$ μετασχηματίζεται σε μια εξίσωση $(n-1)$-τάξη $(*)$.
Αν $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ είναι ένα Β.Σ.Λ. της $(*)$, τότε οι συναρτήσεις $y_1(x), x \in I$, $y_i(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} v_{i-1}(s)\,ds$, $x \in I$ $(i = 2, \dots, n)$ $(x_0 \in I)$

αποτελούν ένα Β.Σ.Λ της $(E_0)^{(n)}$.

Απόδειξη

Ας είναι y_1 λύση της $(E_0)^{(n)}$ με $y_1(x) \neq 0$, $x \in I$.

Για $y = u y_1$ η $(E_0)^{(n)}$ γράφεται: $0 = a_n (u y_1)^{(n)} + a_{n-1} (u y_1)^{(n-1)} + \dots + a_1 (u y_1)' + a_0 u y_1 =$

$$= a_n \left[u^{(n)} y_1 + \dots + u y_1^{(n)} \right] + a_{n-1} \left[u^{(n-1)} y_1 + \dots + y_1^{(n-1)} u \right] + \dots +$$

$$+ a_1 (u' y_1 + y_1' u) + a_0 u y_1 =$$

$$= a_n \left[u^{(n)} y_1 + \dots + n u' y_1^{(n-1)} \right] + u \left(a_n y^{(n)} \right) +$$

$$+ a_{n-1} \left[u^{(n-1)} y_1 + \dots + (n-1) y_1^{(n-2)} u' \right] + u\, a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots +$$

$$+ a_1 u' y_1 + u (a_1 y_1') + u (a_1 y_1) =$$

$$= A_n u^{(n)} + A_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + A_1 u' + u \underbrace{\left[a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y_1' + a_0 y_1 \right]}_{\to 0}$$

$$= 0, \text{ για } u' = v \rightsquigarrow \boxed{A_n v^{(n-1)} + \dots + A_1 v = 0}$$

$(*)$ ... y_i: λύσεις της $(E_0)^{(n)}$

Θα αποδείξω ότι οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γρ. ανεξάρτητες.

Ας είναι $c_1, \dots, c_n$ σταθερές με $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$, $x \in I$

Τότε $c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int_{x_0}^{x} v_1(s)\,ds + \dots + c_n y_1(x) \int_{x_0}^{x} v_{n-1}(s)\,ds = 0$, $x \in I$

$$y_1(x) \left[c_1 + c_2 \int_{x_0}^{x} v_1(s)\,ds + \dots + c_n \int_{x_0}^{x} v_{n-1}(s)\,ds \right] = 0, \quad x \in I$$

$$c_1 + c_2 \int_{x_0}^{x} v_1(s)\,ds + \dots + c_n \int_{x_0}^{x} v_{n-1}(s)\,ds = 0, \quad x \in I$$

Παραγωγίζοντας $\rightarrow$ $c_2 v_1(x) + \dots + c_n v_{n-1}(x) = 0$, $x \in I$

$\Rightarrow c_2 = 0 = \dots = c_n$, ($v_1, \dots, v_{n-1}$ γραμ. ανεξ.)

[άρα και $c_1 = 0$]

Θεωρ. 10 σελ.76 : $\frac{1}{y_1^2(x)}$

$$V_1(x) = \frac{1}{y_1^2(x_0)} \exp\left[- \int_{x_0}^{x} \text{—}\, dt \right], \ x \in I$$ → από πού προκύπτει;

Ασκ. 7 σελ 77

H/W

$xy''' - y'' - xy' + y = 0$

$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x, \ x > 0$

δύο λύσεις

Άσκηση 8